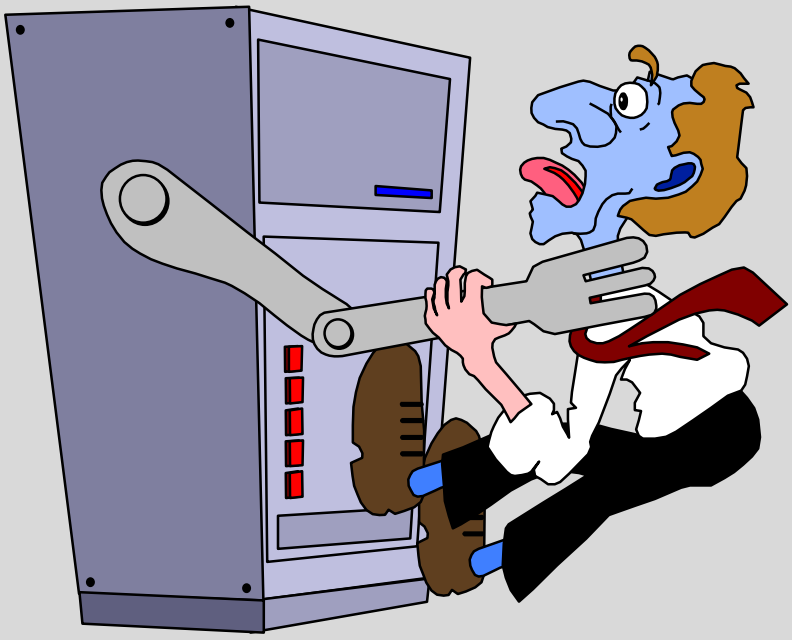
САРОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.В. Алексеев

Сборник задач и упражнений по курсу
Арифметические и логические основы ЭВМ



г. Саров

САРОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЭКОНОМИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра информационных систем в экономике

В.В. Алексеев

Сборник задач и упражнений по курсу

Арифметические и логические основы ЭВМ

(Учебно-методическое пособие для студентов)

Утверждено:
на заседании кафедры ИСвЭ
“” *марта 2000 г.*
Учебно-методическим Советом ЭМФ
“ ” *марта 2000 г.*
Учебно -методическим Советом СарФТИ
“” *марта 2000 г.*

г. Саров
2000 г

УДК 681.32
А 47

Кандидат физико-математических наук, доцент Алексеев Владимир Васильевич

Данное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов, изучающих курс “Арифметические и логические основы ЭВМ”, “Основы алгебры логики” и т.п.

В пособии рассмотрены основные методы решения наиболее часто встречающихся задач по различным информационным курсам. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Данное пособие может быть полезно и для студентов, изучающих дисциплины, связанные с использованием средств вычислительной и цифровой техники

© СарФТИ, 2000 г

1 Перевод чисел в позиционные счисления

Для перевода чисел используются три основных метода: непосредственного деления (умножения), табличный, с использованием промежуточных систем счисления.

Пример 1

Используя метод непосредственного деления и умножения, перевести десятичное число 357.76 в позиционные системы счисления с основаниями: g=2,3,4,5,6,7,8,9,13,16.

Решение:

Для перевода неправильных дробей данным методом необходимо отдельно перевести целую и дробную части числа и результаты соединить “десятичной” точкой.

Итак, для g=2 имеем:

```
 357 |2                                                  0 | 76
-356  178 |2                                               x 2
   1 -178   89 |2                                       1 | 52
      0  -88   44 |2                                      x 2
          1  -42   22 |2                                1 | 04
             0  -22   11 |2                              x 2
                 0  -10    5 |2                        0 | 08
                    1   -4    2 |2                     x 2
                        1   -2    1                    0 | 16
                            0                          x 2
                                                       0 | 32
                                                       x 2
                                                       0 | 64
                                                       x 2
                                                       0 | 28
                                                       x 2
```

Таким образом получили:

$357_{10}=101100101_2$;

$0.76_{10}=0.1100001\ldots$.

И тогда результат будет равен: $357.76_{10}=101100101.1100001_2$

Аналогично для g=3 получаем:

```
 357 |3                                                0 | 76
-357  119 |3                                            x 3
   0 -117   39 |3                                     2 | 28
      2  -39   13 |3                                   x 3
          0  -12    4 |3                             0 | 84
             1   -3    1                              x 3
                 1                                    2 | 52
                                                      x 3
                                                      1 | 56
                                                      x 3
                                                      1 | 68
                                                      x 3
```

Итак, $357_{10}=111020_3$;

$0.76=0202111_3$;

$357.76=111020.2021111_3$.

При g=4 имеем:

```
 357  |4
-356   89  |4
   1  -88   22  |4
        1  -20   5  |4
             2  -4   1
                1
```

```
0 | 76
  x 4
3 | 04
  x 4
0 | 16
  x 4
0 | 64
  x 4
2 | 56
```

Здесь мы получаем:
$357_{10}=11211_4$;
$0.76_{10}=0.30022\ldots_4$;
$357.76_{10}=11211.30022_4$.

Для g=5:

```
 357  | 5
-355   71  | 5
   2  -70   14  | 5
        1  -10   2
             4
```

```
0 | 76
  x 5
3 | 80
  x 5
4 | 00
```

$357_{10}=2412_5$;
$0.76_{10}=0.34_5$.

Для g=6:

```
 357  | 6
-354   59  | 6
   3  -54   9  |6
        5  -6   21
             3
```

```
0 | 76
  x 6
4 | 56
3 | 36
2 | 16
0 | 96
5 | 76
```

Т.е. $357_{10}=1353_6$;
$0.76_{10}=0.43205\ldots_6$;
$357.76_{10}=1353.43205_6$.

(Здесь не показан знак x и множитель 6, а сразу приведен результат умножения на 6)

Пример 2. Перевести число 357.76_{10} в шестеричную систему счисления табличным методом.

Решение: Для каждого десятичного символа заданного числа и весов разрядов запишем соответствующие им числа в шестеричной системе счисления:

Десятичная система	Эквивалент в шестеричной системе счисления
0	0
3	3
5	5
6	10
7	11
10^0	1
10^1	14
10^2	244

10^{-1}	0.033333 (3)
10^{-2}	0.002054..

Подставляя шестеричные эквиваленты в алгебраическую форму представления числа и выполнив действие по законам шестеричной арифметики, получаем запись исходного числа в шестеричной системе счисления:

$357.76_{10}=3\cdot10^2+5\cdot10^1+7\cdot10^0+7\cdot10^{-1}+6\cdot10^{-2}|_{10}=3\cdot244+5\cdot14+1\cdot11+0.0333\cdot11+0.002054\cdot10|_6=$

$=1220+122+11+0.41111+0.02054=1353.43205_6$.

Следует заметить, что табличный метод перевода чаще всего используется при переводе в десятичную систему счисления, т.к. в этом случае этот метод является наиболее эффективным в силу использования при переводе десятичной арифметики.

Пример 3. Перевести восьмеричное число 545.605_8 в десятичную систему счисления.

***Решение*:** Так как $(10_8)^n=8^n_{10}$, а значения символов восьмеричной системы счисления соответствуют числам десятичной системы счисления*, имеем:

$545.605_8= 5\cdot10^2+4\cdot10^1+5\cdot10^0+6\cdot10^{-1}+0\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}|_8=5\cdot8^2+4\cdot8^1+5\cdot8^0+\frac{6}{8}+\frac{0}{8^2}+\frac{5}{8^3}|_{10}=$

$320+32+5+0.75+0.00+0.009765=357.759765_{10}\approx357.76_{10}$. (Следует помнить, что точность определяется требуемым количеством символов после разделительного знака и используемым способом округления).

Ответ: $545.605_8=357.76_{10}$.

Пример 4. Десятичное число 19956.98 перевести в двоичную систему счисления.

Решение:

Целесообразно вначале данное число перевести, например, в шестнадцатеричную систему счисления, а затем, заменяя каждый символ шестнадцатеричной системы счисления ее четырехразрядным двоичным эквивалентом, получить двоичное изображение исходного числа.

Итак, $19956_{10}=4DF4_{16}$; $0.98_{10}=0.FAE14_{16}$; $19956.98_{10}=4DF4.FAE14_{16}$.

$4DF4.FAE14_{16}=\underbrace{0100}_{4}\underbrace{1101}_{D}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{0100}_{4}.\underbrace{1111}_{F}\underbrace{1010}_{A}\underbrace{1110}_{E}\underbrace{0001}_{1}\underbrace{0100}_{4}=$

$=100110111110100.111110101110000101_2$.

Ответ: $19956_{10}=100110111110100.111110101110000101_2$.

Пример 5. Восьмеричное число 567321.435_8 запишите в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение:

Вначале исходное число переведем в двоичную систему счисления, заменяя каждый символ исходного восьмеричного числа двоичной триадой:

$567321.4351_8=101110111011010001.100011101_2$.

Теперь полученное двоичное число разобьем на тетрады (т.е. по четыре символа). При этом целая часть разбивается на тетрады, начиная от разделительной точки влево, а дробная часть – вправо. Если последняя группа символов, полученная при разбивки двоичного слова на тетрады, содержит меньше четырех символов, то можно дописать слева нули для целой части и справа – для дробной части числа, так, чтобы общее количество символов в конечных группах было равно четырем. Следует заметить, что «левые» нули для целой части числа и «правые» нули для дробной части числа являются незначащими.

$10111011011010001.100011101=10/1110/1110/1101/0001.1000/1110/1=$

* Вообще-то $(10_q)^n=q^n_{10}$, где q – основание системы счисления.

$0010/1110/1110/1101/0001.1000/1110/1000_2$.
Теперь, заменяя каждую тетраду шестнадцатеричным эквивалентом, получим то же число, представленное уже в шестнадцатеричной системе счисления:
$0010/1110/1110/1101/0001.1000/1110/1000_2=2EED1.8E8_{16}$.
Ответ: $567321.4351_8=2EED1.8E8_{16}$.

Задачи для самостоятельного решения

№ 1.1. Указанные числа в десятичной системе перевести в двоичную систему счисления:
а) 49, 126, 77, 91, 148, 127, 381, 511, 111, 222, 333, 444, 987, 1289, 1000, 2000, 1024, 1023;
б) 0.1, 0.25, 0.5, 0.025, 0.017, 0.17, 0.0013, 0.49, 0.99, 0.11, 0.22, 0.33, 0.567, 0.987, 0.5566;
в) 24.72, 37.48, 55.55, 33.01, 111.99, 222.11, 22.22, 33.33, 100.001, 34.43, 75.75, 512.512.

№ 1.2. Указанные десятичные числа перевести в систему счисления с основаниями q=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16:
147.28, 151.98, 167.001, 99.99, 45.54, 34.45, 67.2, 10.2, 20.1, 999.999, 245.82, 456.23.

№ 1.3. Исходные числа переведите в указанные системы счисления методом непосредственного деления и умножения:
а) 777.77_8 в 2-ю, 3-ю, 4-ю, 5-ю, 6-ю, 7-ю, 9-ю, 10-ю, 16-ю;
б) 210210.2121_4 в 2-ю, 3-ю, 5-ю, 6-ю, 7-ю, 8-ю, 9-ю, 10-ю, 16-ю;
в) $ABF.CF7_{16}$ в 2-ю, 3-ю, 4-ю, 5-ю, 6-ю, 7-ю, 8-ю, 9-ю, 10-ю.

№ 1.4. Методом непосредственного деления и умножения переведите указанные числа из двоичной системы счисления в десятичную:
а). 110111011100.11011, б). 1010100.001, в). 10001.101, г). 111011.10011, д). 1101100.11.

№ 1.5. Используя табличный метод, переведите заданные числа в указанные системы счисления:
а). 543_6 в систему с основанием q=2, 3, 4, 5, 8, 10;
б). 675_8 в систему с основанием q=2, 3, 4, 6, 10, 16;
в). 12021.21_3 в систему с основанием q=8, 6, 4, 9, 10;
г). 147.27_8 в систему с основанием q=2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 16;
д). 132.23_4 в систему счисления с основанием q= 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10;

№ 1.6. Указанные двоичные числа переведите в десятичную систему счисления табличным методом:
а). 110111011100.11011, б). 1010100.001, в). 10001.101, г). 111011.10011, д). 1101100.11, е) 1101110111.000011, ж). 1111111111, з). 1010101010.10101, и). 1100110011.1111.

№ 1.7. Указанные числа переведите в десятичную систему счисления табличным методом:
а). 1221.212_3, б). 12332.323_4, в). 234.432_5, г). 4344.412_5, д). 5412.32_6, 555.55_6, е). 331.12_6, ж). 1221.21_7, з). 1221.21_8, и). 543.45_8, к). 217.76_8, k). $AFF.84C_{16}$, л). $BAE.EFD_{16}$. м). FFF.F.

№ 1.8. Указанные десятичные числа переведите в двоичную систему счисления, используя восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления в каждом случае и сравните полученные результаты:
а). 1999.99, б). 3245.45, в). 7258.59, г). 9988.81, д). 56987.65, е). 1048575, ж). 4567.235.

№ 1.9. Указанные восьмеричные числа запишите в двоичной системе счисления:
а). 345.23, б). 6754.543, в). 777.777, г). 12765.567, д).234567.54001, е). 50001.0001.

№ 1.10. Указанные шестнадцатеричные числа запишите в двоичной системе счисления:
а). 23.67, б). 24A.A01, в). A10924.012F, г). FFFFF.FFFF, д). A89B2CD.EDA01.

№ 1.11. Исходные двоичные числа запишите в шестнадцатеричной, восьмеричной и четверичной системах счисления:
а). 10111011101000111.111101110111, б). 10011101101111110011110.111101100101110,
в). 10010000000100000100011.000000001, г). 11111111110000000001111.1001010100110.

№ 1.12. Исходные числа запишите в шестнадцатеричной системе счисления:
а). 23311.213_4, б). 11101.001_4, в). 7612.175_8, г). 11101.001_8, д). 777756.657777, е). 21001_4.

№ 1.13. Указанные шестнадцатеричные числа запишите в четверичной и восьмеричной системах счисления:
а). 23.67, б). 24A.A01, в). A10924.012F, г). FFFFF.FFFF, д). A89B2CD.EDA01.

№ 1.14. Существует ли система счисления в которой 4+3=10 и 4×5=15?

№ 1.15. Сумму шестнадцатеричных чисел B+B0+B00+B000+B0000+B00000 перевести в восьмеричную систему счисления. Найти в записи числа, равного этой сумме, пятую цифру слева.

№ 1.16. Число 31.45, заданное в десятичной системе счисления, перевели в четверичную систему счисления. Найти 1999 цифру после запятой.

№ 1.17. Число 13.2, заданное в десятичной системе счисления, перевели в восьмеричную систему счисления. Найти 1998 цифру после запятой.

№ 1.18. Сумму шестнадцатеричных чисел A+A0+A00+A000+A0000+A00000 перевели в восьмеричную систему счисления. Найти в записи числа, равного этой сумме, седьмую цифру слева.

№ 1.19. Сумму восьмеричных чисел 17+1700+170000+17000000+1700000000 перевели в шестнадцатеричную систему счисления. Найти в записи числа, равного этой сумме, пятую цифру слева.

№ 1.20. Сумму шестнадцатеричных чисел 0.A+0.0A+0.00A+…..+0.0000000000A перевели в восьмеричную систему счисления. Найти в записи числа, равного этой сумме, десятую цифру после запятой.

2. Арифметика позиционных систем счисления

Любая позиционная система счисления будет определена, если в ней установлены символы, необходимые для изображения чисел и правила действия над числами. Как правило, к самым основным действиям любой арифметики относятся правила сложения, умножения. Правила вычитания и деления определяются через правила суммирования и умножения соответственно. Установить правила k-той арифметики это означит установить символы для изображения чисел (k символов) и установить правила действия над числами в установленных символах.

Пример 2.1. Для позиционной системы счисления установите правила четверичной арифметики, если для изображения чисел приняты символы: 0 для изображения нуля, 1- для изображения единицы, 2-для изображения двух единиц, 3- для изображения трех единиц.

Решение:

Правила суммирования и правила умножения представим в виде таблиц:

Правила суммирования

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

Правила умножения

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Пример 2.2. Для позиционной системы счисления установите правила четверичной арифметики, если для изображения чисел приняты символы: X для изображения нуля, Y- для изображения единицы, Z-для изображения двух единиц, V- для изображения трех единиц.

Решение:

Правила суммирования и правила умножения также представим в виде таблиц:

Правила суммирования

+	X	Y	Z	V
X	X	Y	Z	V
Y	Y	Z	V	YX
Z	Z	V	YX	YY
V	V	YX	YY	YZ

Правила умножения

×	X	Y	Z	V
X	X	X	X	X
Y	X	Y	Z	V
Z	X	Z	YX	YZ
V	X	V	YZ	ZY

Пример 2.3. Выполните указанные действия в шестеричной системе счисления:

543.54+125.34×35.2.

Решение:

Поскольку умножение имеет приоритет выше сложения, то вначале выполним умножение 125.34×35.2 по законам шестеричной арифметики и получим:

$$\begin{array}{r} 12534 \\ \times\ \ 352 \\ \hline 25512 \\ +\ 112402 \\ +\ 42450 \\ \hline 5442532 \end{array}$$

Тогда 125.34×35.2=5442.532.

Теперь выполняем операцию сложения:

$$\begin{array}{r} 5442.532 \\ +\ \ 543.54 \\ \hline 10430.512 \end{array}$$

Ответ: 10430.512.

Пример 2.4. Найти сумму всех целых двоичных чисел в диапазоне от 11 до 1111. Границы диапазона указаны в двоичной системе счисления. Результат представить в десятеричной и восьмеричной системе счисления.

Решение: Самый неэффективный способ – это непосредственное сложение двоичных чисел в указанном диапазоне.

Самый простой способ – воспользоваться формулой суммы арифметической прогрессии.

Другой способ состоит в следующем:

Так как веса разрядов двоичной системы счисления кратны 2^n, то любое двоичное число представимо как сумма весов разрядов, умноженных на символ разряда. Поэтому сумма двоичных чисел в указанном диапазоне может быть представлена как сумма произведений весов разряда на количество единиц данного разряда, содержащихся в указанном диапазоне. В данном примере имеет место четырехзначные двоичные числа в диапазоне от 0011 до 1111. Веса разрядов имеют значения 8 4 2 1. Количество единиц в диапазоне, соответствующих старшему (3-му) разряду равно 8. Количество единиц в диапазоне, соответствующих 2-му разряду также равно 8. Количество единиц в диапазоне, соответствующих 1-му разряду равно 8-1=7 (т.к. числа 0000, 0001, 0010 в указанный диапазон не входят). И количество единиц, соответствующих 0-му разряду равно также равно 7. Следовательно, сумма двоичных чисел в десятичном эквиваленте равна 8×8+8×4+7×2+7×1=64+32+14+7=117.

В восьмеричной системе счисления имеем:

$$10\times10+10\times4+7\times2+7\times1=100+40+16+7=165.$$

(Этот же результат можно получить, если перевести десятичное число 117 в восьмеричную систему счисления)

Ответ: 117_{10} или 165_8.

№ 2.1. Выполните арифметические действия в указанной системе счисления:

1. В двоичной системе счисления:
   а). (10110+1001)×(1011101-1011)|; б). 1011011.101×1011-1101.011;
   в). 110111011:11011; г). 101111+110010×100-111011×11.01.
2. В троичной системе счисления:
   а). (2112.121+21.102):(2122-1022); б). 2112×122+122; в). 212011:202;
   г). 222.111×121.12.
3. В четверичной системе счисления:
   а). 23.12+31.33; б). 231.12×213; в). (333.222+101.112):23;
   г). (231.12+133.32) $\times100^3$.
4. В восьмеричной системе счисления:
   а). 2567.345+176.645; б). 1457×347-762; в). 32010:37;
   г). (776655+557766):(6644+1135).
5. В шестнадцатеричной системе счисления:
   а). AB35.EB5+F98C.ACD; б). (367FD+9AEF1)×ACD; в). AD5×5DE=FAD8C.

№ 2.2. В учебных кабинетах института имеется всего 330 компьютеров. Из них 202 компьютера типа Pentium II, и 124 компьютера других модификаций. В какой системе счисления записаны числа в условии задачи?

№ 2.3. Найти среднее арифметическое значение всех целых шестнадцатеричных чисел в диапазоне от A до A1, включая границы. Границы диапазона заданы в шестнадцатеричной системе счисления. Результат записать в шестнадцатеричной системе счисления.

№ 2.4. Найти сумму всех целых двоичных чисел в диапазоне от 1111 до 11111 включая границы. Границы диапазона представлены в двоичной системе счисления. Результат записать в шестнадцатеричной системе счисления.

№ 2.5. Найти сумму шестнадцатеричных чисел AA+AC+AE+….FA. Ответ записать в восьмеричной системе счисления.

№ 2.6. Найти сумму целых восьмеричных чисел в диапазоне от 3 до 33, включая границы. Границы диапазона даны в четверичной системе счисления. Результат представить в шестнадцатеричной системе счисления.

№ 2.7. Найти сумму всех целых шестнадцатеричных чисел в диапазоне от A до AA, включая границы. Границы диапазона даны в шестнадцатеричной системе счисления. Ответ записать в восьмеричной системе счисления.

3 Представление числовой информации в ЭВМ

В ЭВМ используются три вида представления числовой информации (как правило – в двоичной системе счисления): с фиксированной точкой (запятой), с плавающей точкой и двоично-десятичное представление. Точка (запятая) – это условная граница числа, разделяющая целую и дробную части числа*.

Числа с фиксированной точкой имеют строго фиксированное положение разделительной точки. Если точка фиксируется перед первой значащей цифрой, то это означает, что число по модулю меньше единицы. Диапазон изменения значений чисел в этом случае определяется формулой:

$$2^{-n} \le |A| \le 1 - 2^{-n}$$

Если точка фиксируется после последней значащей цифры, то это означает, что n – разрядные двоичные числа являются целыми. Диапазон изменения их значений составляет:

$$0 \le |A| \le 2^n - 1.$$

Перед самым старшим из возможных разрядов двоичного числа фиксируется его знак. Положительные числа имеют нулевое значение знакового разряда, отрицательные – единичные.

Числа с плавающей точкой (запятой) представляются в виде мантиссы m_a и порядка p_a. Они могут быть представлены в соответствии со следующей формой записи: $A = 2^{\pm p_a} \cdot (\pm m_a)$. Порядок числа p_a определяет положение точки в двоичном числе. Значение порядка лежит в диапазоне $-p_a^{max} \le p_a \le p_a^{max}$, где величина p_a^{max} определяется числом разрядов r, отведенных для представления порядка и равна $p_a^{max} = 2^r - 1$.

Мантисса числа m_a представляется двоичным числом, у которого точка фиксируется перед старшим разрядом, т.е. $0 \le |m_a| \le 1 - 2^{-n}$, где n – число разрядов, отводимых для представления мантиссы. Если $q^{-1} \le |m_a| \le 1 - 2^{-n}$, то старший значащий разряд мантиссы в системе счисления q отличен от нуля, и такое представление числа называется нормализованным. Диапазон представления нормализованных чисел с плавающей точкой определяется формулой:

$$2^{-1} \cdot 2^{-(2^r - 1)} \le |A| \le (1 - 2^{-n}) \cdot 2^{(2^r - 1)},$$

где r и n – соответственно количество разрядов, используемых для представления порядка и мантиссы.

При двоично-десятичном представлении числовой информации каждая цифра десятичного числа представляется отдельной двоичной тетрадой. Положение

* Иногда она называется разделительной точкой. В случае десятичной системы счисления говорят в этом случае о десятичной точке.

десятичной точки, отделяющей целую часть числа от дробной, обычно фиксируется заранее. Значение знака числа отмечается кодом, отличным от кодов цифр. Например, «+» имеет значение тетрады «1100», а «-» -«1101».

Во всех ЭВМ все операции над числами выполняются представленными специальными машинными кодами. Их использование позволяет обрабатывать знаковые разряды так же, как и значащие разряды, а также заменять операцию вычитания операцией сложения. Различают прямой код (ПК), обратный код (ОК), дополнительный код (ДК) двоичных чисел. Формат представления данных, при котором в знаковой части числа используется два разряда, называется модифицированным.

Пример 3.1. Десятичное число A_{10}=+27 представить в прямом, обратном и дополнительном кодах.

Решение: Так как обратный и дополнительный коды положительного числа совпадают с их прямым представлением, то A_{10}=+27=A_2=+11011=$[A_2]_{пр}$=$[A_2]_{об}$=$[A_2]_{доп}$=0|11011.

Здесь вертикальной линией отмечена условная граница, отделяющая знаковый разряд от значащих.

Пример 3.2. Десятичное число A_{10}=-27 записать в прямом, обратном и дополнительном кодах; в модифицированном формате для обратного и дополнительного кодов.

Решение: A_{10}=-27=A_2=-11011=$[A_2]_{пр}$=1|11011. $[A_2]_{об}$=1|00100. $[A_2]_{доп}$=1|00101.

$[A_2]_{ок}^{мод}$=11|00100. $[A_2]_{доп}^{мод}$ = 11|00101.

При выполнении операции арифметического сложения двоичных чисел необходимо соблюдать следующие правила:

- Слагаемые должны иметь одинаковое число разрядов. Для выравнивания разрядной сетки слагаемых можно дописывать незначащие нули слева к целой части числа и незначащие нули справа к дробной части числа.
- Знаковые разряды участвуют в сложении так же, как и значащие;
- Необходимые преобразования кодов производятся с изменением знаков чисел. Приписанные незначащие нули изменяют свое значение при преобразованиях по общему правилу;
- Сложение чисел в прямом коде допускается лишь над числами одного знака, так как на двоичных сумматорах прямого кода (ДСПК) отсутствует цепь переноса из старшего разряда цифровой части в знаковую. При использовании дополнительного кода (ДСДК) следует учитывать наличие цепи переноса из старшего разряда цифровой части в знаковую, а также то, что единица переноса из знаковой части теряется. При сложения чисел в обратном коде (ДСОК) необходимо учитывать наличие цепи переноса из цифровой части в знаковую и суммирование единицы переноса из знаковой части с младшим разрядом цифровой части.
- Результат представляется в том коде, в котором представлены слагаемые.

Пример 3.3. Сложить числа А и В в прямом, обратном и дополнительном кодах, если A_{10}=+42, B_{10}=+15.

Решение: Запишем слагаемые в двоичной системе счисления:

A_2=+101010;

B_2=+1111.

Исходные данные имеют различное число разрядов и поэтому необходимо выполнить выравнивание разрядной сетки:

$[A_2]_{пр}$=$[A_2]_{об}$=$[A_2]_{доп}$=0|101010;

$[B_2]_{пр}$=$[B_2]_{об}$=$[B_2]_{доп}$=0|001111.

Сложение и в прямом, и в обратном, и в дополнительном коде дает один и тот же результат:

$$\begin{array}{r} [A_2]=0|101010 \\ +[B_2]=\underline{0|001111} \\ [C_2]=0|111001 \end{array}$$

Отсюда имеем результат $C_{10}=+57$.

Пример 3.4. Выполнить сложение двух чисел А и В в обратном и дополнительном кодах, если $A_{10}=+40$, $B_{10}=-13$.

Решение: Представим слагаемые в обратном и дополнительном кодах:

$[A_2]_{пр}=0|101000$; $[A_2]_{ок}=0|101000$; $[A_2]_{доп}=0|101000$.

$[B_2]_{пр}=1|1101=1|001101$; $[B_2]_{ок}=1|110010$; $[B_2]_{доп}=1|110011$.

Сложение в ОК

$$\begin{array}{r} [A_2]_{ок}=0|101000 \\ +[B_2]_{ок}=\underline{1|110010} \\ 0|011010 \\ +\quad 1 \\ \hline [C_2]_{ок}=0|011011 \end{array}$$

Сложение в ДК

$$\begin{array}{r} [A_2]_{доп}=0|101000 \\ +[B_2]_{доп}=\underline{1|110011} \\ [C_2]_{доп}=0|011011 \end{array}$$

При сложении чисел в ОК и ДК были получены переносы в знаковый разряд и из знакового разряда. В случае ОК перенос из знакового разряда требует дополнительного прибавления единицы к младшему разряду цифровой части. В случае ДК этот перенос игнорируется.

Операция сложения (вычитания) в формате с плавающей точкой производится в следующей последовательности:

- Сравниваются порядки исходных слагаемых путем их вычитания $\Delta p = p_1 - p_2$.
- Если разность порядков равна нулю, то это значит, что одноименные разряды мантисс имеют одинаковые веса (двоичный порядок). В противном случае должно проводиться выравнивание порядков.
- Для выравнивания порядков число с меньшим порядком сдвигается вправо на разницу порядков Δp. Младшие разряды, выталкиваемые из разрядной сетки, при этом теряются.
- Выполняется операция сложения мантисс в установленном коде.
- Порядок результата берется равным большему порядку.
- Осуществляется операция нормализации результата.

Пример 3.5. На ДСОК, включающим 6 разрядов мантиссы и 4 разряда для порядка, выполнить действие: C=A+B, если $A=0.1001\cdot 2^{-2}$ и $B=-0.1011\cdot 2^{-3}$.

Решение:

$[m_A]^M_{об}=00|1001$; $[p_A]_{об}=1|101$; $[m_B]^M_{об}=11|0100$; $[p_B]_{об}=1|100$.

$[\Delta p]_{об}=[p_A]_{об}-[p_B]_{об}=[p_A]_{об}+(-[p_B]_{об})=1|101+0|011=0|001$. Т.к. $\Delta p>0$, следовательно, $p_A>p_B$, и нужно сдвинуть мантиссу числа В на один разряд. После сдвига получаем:

$[m_B]^M_{об}=11|1010$. Складывая мантиссы, получаем:

$$\begin{array}{r} [m_A]^M_{об}=00|1001 \\ + \\ [m_B]^M_{об}=11|1010 \\ \hline [m_C]^M_{об}=00|0011 \\ +\qquad 1 \\ [m_C]^M_{об}=00|0100 \end{array}$$

←единица переноса из знакового разряда

Здесь необходимо выполнить операцию нормализации результата, т.к. имеет место нарушение нормализации слева: (Здесь через Sg_1 и Sg_2 обозначены разряды знаковой части числа, а p_1 – старший разряд цифровой части числа).

$$\delta = Sg_2 \,\&\, p_1 \vee \overline{Sg}_2 \,\&\, \overline{p}_1 = 1\cdot 1 \vee 0\cdot 0 = 1 \vee 0 = 1.$$

$$\gamma = \overline{Sg}_1 \,\&\, Sg_2 \vee Sg_1 \,\&\, \overline{Sg}_2 = 0\cdot 1 \vee 1\cdot 0 = 0 \vee 0 = 0.$$

Выполнив коррекцию результата, получим:

$$[m_C^*]_{об}^M = 00|1000; \quad [p_C^*]_{об} = 1|101+1|110 = 1|100.$$

Теперь $\delta=0$, $\gamma=0$, и можно записать результат:

$[m_C]_{об}^M = [m_C^*]_{об}^M = 00|1000$; $[p_C]_{об} = [p_C^*]_{об} = 1|100$. $m_C = 0|1000$; $p_C = -011$. $\boxed{C = 0.1000\cdot 2^{-3}}$

Ответ: $C = 0.1\cdot 2^{-3}$.

Пример 3.6 Сложить два числа: A=379 и B=891, если для представления чисел используется двоично-десятичный код 8421.

Решение: Правило потетрадного сложения чисел в D – коде 8421 гласит:

Если при потетрадном сложении возникает перенос в соседнюю тетраду или возникает запрещенная комбинация, то осуществляется коррекция результата путем добавления поправки +0110 к тетраде[1].

Выполняя потетрадное суммирование в соответствии с приведенным правилом, получаем:

```
A= 0011  0111 1001
B= 1000  1001 0001
   1100  0000 1010
   0110  0110 0110   ← поправки
C= 1 0010  0111 0000
```

Ответ: $C = 1\ 0010\ 0111\ 0000 = 1270_{10}$.

Задачи для самостоятельного решения.

№ 3.1. Указанные десятичные числа запишите в двоичной системе в форме с фиксированной точкой после последнего значащего разряда, если длина разрядной сетки равна 8 двоичным разрядам (т.е. одному байту).

45; –34; 5; -23; 157; 1; 0; -11; -22; 111; -111; 100; -100; 33; -33; 126; 127; -127.

№ 3.2 Приведите диапазон изменения чисел для формата с фиксированной точкой перед старшим значащим разрядом и длиной разрядной сетки, равной:

n=4; n=8; n=10; n=12; n=16; n=24; n=32; n=64.

№ 3.3 Приведите диапазон изменения чисел для формата с фиксированной точкой после последнего значащего разряда, если длина разрядной сетки представления чисел равна:

n=4; n=8; n=10; n=12; n=16; n=24; n=32; n=64.

№ 3.4 Длина разрядной сетки машинных слов равна 16 двоичным разрядам (двум байтам). Для целой части числа отводится 11 старших разрядов с учетом знакового и пять разрядов для представления дробной части числа. (Разделительная точка зафиксирована). В указанном формате запишите следующие числа:

23.25; 129.2; -248.45; 128; -0.256; 356.78; 198.35; -567.76; -0.0875; 0.0005; 999.99.

[1] Следует заметить, что данное правило относится только к двоично-десятичному коду с весами 8421. В случае использования другого D- кода, правило сложения чисел в этом коде будет иное.

№ 3.5 Для представления чисел в формате с плавающей точкой в нормализованном виде используется шестнадцатиразрядная сетка. При этом для представления мантиссы отводится десять разрядов и шесть разрядов отводится для представления порядка. Определите диапазон изменения чисел для позиционных систем счисления с основаниями:
q=2; q=3; q=4; q=5; q=6; q=7; q=8; q=9; q=10; q=12; q=16.

№ 3.6 Для представления чисел в формате с плавающей точкой в нормализованном виде используется шестнадцатиразрядная сетка. При этом для представления мантиссы отводится десять разрядов и шесть разрядов отводится для представления порядка. Указанные десятичные числа представьте в приведенном формате:
а). 25.65; б). –25.25; в). $156.575 \cdot 10^{2}$; г). 0.00257; д). $0.325 \cdot 10^{-1}$; е). 2255.675; ж). –578.9.

№ 3.7 Как изменится представление чисел, приведенных в № 3.6, если при тех же условиях будет применяться модифицированный формат представления чисел?

№ 3.8 Длина разрядной сетки равна 1-му байту. В формате с фиксированной точкой после последнего значащего разряда приведите представление чисел в прямом, обратном и дополнительном кодах:
23; 56; -24; -78; -29; 79; 100; -100; 111; 122; -111; -122; 33; -33.

№ 3.9 Длина разрядной сетки машинных слов равна двум байтам. Для целой части числа отводится 11 старших разрядов с учетом знакового и пять разрядов для представления дробной части числа. (Разделительная точка зафиксирована). Приведите представление указанных чисел в прямом, обратном и дополнительном кодах:
245.67; -245.67; 0.02575; -0.02575; 0; 1; -1; 28; -28; 0.1; -0.1; 256.75; -256.75.

№ 3.10 Для сложения двоичных чисел используется формат с фиксированной точкой после последнего значащего разряда. Длина разрядной сетки равна восьми разрядам. В указанном формате выполните действия C=A+B, если используется обратный код представления данных и:
а). A=35, B=28; б). A=97, B=-48; в). A=-89, B=33; г). A=-37, B=-59; д). A=-40, B=40.
(Числа даны в десятичной системе счисления).

№ 3.11 Решите № 3.10, если для представления данных используется дополнительный код.

№ 3.12 Длина разрядной сетки машинных слов равна двум байтам. Для целой части числа отводится 11 старших разрядов с учетом знакового и пять разрядов для представления дробной части числа. (Разделительная точка зафиксирована). В указанном формате выполните действия C=A-B, если используется обратный код представления данных и:
а). A=10.5, B=10.5; б). A=345.57, B=-45.43; в). A=-257.75, B=64.57; г). A=-199.8, B=-9.3.

№ 3.13 Решите № 3.12, если для представления данных используется дополнительный код.

№ 3.14 Какие случаи из № 3.10 и № 3.12 могут быть реализованы в случае использования прямого кода представления данных. Выполните соответствующие операции в приведенных форматах.

№ 3.15 В двоично-десятичном коде 8421 выполните сложение:
a). 345+392; b). 9873+1007; c). 2876+9862; d). 567+3456+235; e). 65+34+56+98;
f). 34.56+56.98; g). 789.0045+121.1098; h). 0.123+0.983+0.03; i). 897+0.0654+12.87.

№ 3.16 Сформулируйте правила сложения в коде 2421 и выполните сложение чисел, приведенных в № 3.15. Сравните результаты. Проверьте правильность представления результата в D-коде 2421.

4 Элементы математической логики

4.1 Логика высказываний

Первичным понятием математической логики является понятие **высказывания.**
Под высказыванием понимается предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно **истинно** (И) или **ложно** (Л). Значения «истинно» будем обозначать «1», а ложно – «0».

Сложные высказывания строятся из простых с использованием связок НЕ, И, ИЛИ, ИМПЛИКАЦИЯ, ЭКВИВАЛЕНЦИЯ.

1.Отрицанием высказывания А называется такое высказывание, которое принимает значение 0 (Л), если А истинно и, наоборот, - 1(И), когда А принимает значение 0. Обозначается: $\neg A$, или $\overline{A}$, или ~А. Читается "**не А**" , **неверно что А**".

2.Коньюнкцией (логическим произведением) двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истины оба высказывания (и значение Л во всех остальных случаях). Конъюнкция высказываний А и В обозначается через А&В или А^В и читается как "**А и В**"

3.Дизъюнкцией (логической суммой) двух высказываний А и В называется высказывание, ложное тогда и только тогда когда оба высказывания А и В ложны (и значение И во всех остальных случаях). Дизъюнкция А и В обозначается $A \vee B$ и читается как "**А или В**".

4.Импликацией двух высказываний А и В называется такое составное высказывание, которое принимает значение "ложь" (0) в том и только в том случае, когда А принимает значение 1 (И) В-0 (Л) (и значение "истинно", т.е. 1 во всех остальных случаях). Импликация обозначается через $A \Rightarrow B$, $A \to B$ и читается как "**А влечет В**", "**из А следует В**", "**если А то В**", "**А достаточно для В**". Высказывание А называется посылкой (условием импликации), а высказывание В – заключением (следствием) импликации.

5.Эквиваленцей двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значение А и В совпадают. Эквиваленция высказываний А и В обозначается $A \Leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ и читается так "**А эквивалентно В**", "**А тогда и только тогда когда В**", "**А необходимо и достаточно В**".

Формула, которая принимает значение 1 (И) при любом наборе истинностных значений входящих в нее букв, называется тождественно истинной или **тавтологией.**

Приведем наиболее важные тавтологии. (А, В, С – произвольные формулы)

1. $A \vee \overline{A}$ - закон исключения третьего;
2. $\overline{A \cdot \overline{A}}$ - закон отрицания противоречия;
3. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ - закон двойного отрицания;
4. $A \cdot 1 \equiv A;\quad A \cdot 0 \equiv 0;$
   $A \vee 1 \equiv 1;\quad A \vee 0 \equiv A;$
   $A \cdot (B \vee A) \equiv A;\quad A \vee (B \cdot A) \equiv A.$
   } - законы поглощения;

5. $\left.\begin{array}{l} A \cdot A \equiv A \\ A \vee A \equiv A \end{array}\right\}$ - законы идемпотентности конъюнкции и дизъюнкции;
6. $\left.\begin{array}{l} A \cdot B \equiv B \cdot A \\ A \vee B \equiv B \vee A \end{array}\right\}$ - законы коммутативности;
7. $\left.\begin{array}{l} A \cdot (B \cdot C) \equiv (A \cdot B) \cdot C \\ A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \end{array}\right\}$ - законы ассоциативности;
8. $\left.\begin{array}{l} A \cdot (B \vee C) \equiv (A \cdot B) \vee (A \cdot C) \\ A \vee (B \cdot C) \equiv (A \vee B) \cdot (A \vee C) \end{array}\right\}$ - законы дистрибутивности;
9. $\left.\begin{array}{l} \overline{(A \cdot B)} \equiv (\overline{A} \vee \overline{B}) \\ \overline{(A \vee B)} \equiv (\overline{A} \cdot \overline{B}) \end{array}\right\}$ - законы де-Моргана.
10. $A \to A$ - закон тождества;
11. $(A \to B) \equiv (\overline{B} \to \overline{A})$ - закон контрапозиции;
12. $(A \to B) \cdot (B \to C) \equiv (A \to C)$ - правило цепного заключения;
13. $A \equiv A$ - закон реффлексивности эквиваленции;
14. $(A \equiv B) \equiv (B \equiv A)$ - закон симметричности эквиваленции;
15. $(A \equiv B) \cdot (B \equiv C) \to (A \equiv C)$ - закон транзитивности эквиваленции;
16. $(A \equiv B) \equiv (\overline{A} \equiv \overline{B})$ - закон противоположности.

Формулы A и B называются равносильными, если на любой оценке списка $(x_1..x_n)$ они принимают одинаковые значения. Равносильность формул A и B будем обозначать A=B.

Приведем основные равносильные формулы.

1. $A\&B=(\overline{\overline{A} \vee \overline{B}})$;
   $A \vee B \equiv (\overline{\overline{A}\,\&\,\overline{B}})$;
2. $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B)\&(B \Rightarrow A)$;
3. $A \Rightarrow B \equiv \overline{A\,\&\,\overline{B}}$;
   $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$;
4. $A\,\&\,B \equiv \overline{A \Rightarrow \overline{B}}$;
   $A \vee B \equiv \overline{A} \Rightarrow B$;
5. $A \equiv (A\,\&\,B) \vee (A\,\&\,\overline{B})$ - первая формула расщепления;

а) $A \equiv (A \vee B)\&(A \vee \overline{B})$ - вторая формула расщепления.

Система связок называется полной, если с помощью этой системы связок для любой функции алгебры высказываний можно составить формулу.

Всякую формулу можно свести к дизъюнктивной нормальной или конъюнктивной нормальной форме, а также и к совершенной дизъюнктивной или совершенной конъюнктивной форме.

Пример 4.1 Составить таблицы истинности для формулы: $f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)}$

Решение: Обозначим $A = a \equiv b$; $B = \overline{c \equiv b}$. Тогда формулу можно записать как $f=A \to B$.

Таблица истинности отражает значение формулы для каждого набора переменных, количество которых определяется формулой 2^n, где n – число логических переменных. В данном случае n=3 и, следовательно, число наборов будет равно $2^3=8$. В таблице истинности, помимо основных столбцов приведем столбцы (4-й и 5-й) с промежу-

точными вычислениями. Итак, согласно определениям связок получаем следующую таблицу:

Таблица 4.1

a	b	c	$A = a \equiv b$	$B = \overline{c \equiv b}$	$f = A \to B$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Пример 4.2 Методом равносильных преобразований формулу $f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)}$ представить в дизъюнктивной нормальной форме.

Решение: Алгоритм преобразования формулы в д.н.ф. можно сформулировать следующим образом:

- Находится формула, равносильная данной и не содержащая связок $\to$, $\equiv$. Это достигается с помощью правил подстановки и равносильных преобразований;
- С помощью законов де Моргана и правил подстановок получают формулу, равносильную данной, у которой отрицания относятся только к отдельным переменным (т.е. отрицания вносятся в скобки);
- Применяя несколько раз закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и правила подстановки, приводят формулу к равносильной д.н.ф.

В процессе преобразования формулу можно упрощать.

Итак, согласно приведенному алгоритму, вначале выполним преобразования

$f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)} = \overline{a \equiv b} \vee \overline{c \equiv b}$;

т.к. $\overline{a \equiv b} = \overline{(a \to b) \cdot (b \to a)} = \overline{(\bar{a} \vee b) \cdot (\bar{b} \vee a)} = \overline{(\bar{a} \vee b) \cdot (a \vee \bar{b})} = \overline{\bar{a} \vee b} \vee \overline{a \vee \bar{b}} = a \cdot \bar{b} \vee \bar{a} \cdot b$;

и $\overline{c \equiv b} = \overline{(c \to b) \cdot (b \to c)} = \overline{(\bar{c} \vee b) \cdot (c \vee \bar{b})} = \overline{\bar{c} \vee b} \vee \overline{c \vee \bar{b}} = c \cdot \bar{b} \vee \bar{c} \cdot b$.

то теперь применяя правила подстановки получаем:

$f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)} = \overline{a \equiv b} \vee \overline{c \equiv b} = a \cdot \bar{b} \vee \bar{a} \cdot b \vee c \cdot \bar{b} \vee \bar{c} \cdot b$

Ответ: $a \cdot \bar{b} \vee \bar{a} \cdot b \vee c \cdot \bar{b} \vee \bar{c} \cdot b$.

Пример 4.3 Методом равносильных преобразований формулу $f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)}$ представить в конъюнктивной нормальной форме.

Решение: Алгоритм приведения формулы к к.н.ф. аналогичен алгоритму приведения формулы к д.н.ф., за исключением того, что в данном случае вместо применения закона дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции необходимо применять закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.

$f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)}\ \overline{a \equiv b} \vee \overline{c \equiv b} = \overline{(a \equiv b) \cdot (c \equiv b)}$;

Формулу типа $x \equiv y$ приведем к виду:

$x \equiv y = (x \to y) \cdot (y \to x) = (\bar{x} \vee y) \cdot (x \vee \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \vee x \cdot y = x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$.

Тогда используя правило подстановки получаем:

$f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)}\ \overline{a \equiv b} \vee \overline{c \equiv b} = \overline{(a \equiv b) \cdot (c \equiv b)} = \overline{(a \cdot b \vee \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot (c \cdot b \vee \bar{c} \cdot \bar{b})} = \overline{a \cdot b \cdot c \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}} =$

$= \overline{(a \cdot b \cdot c)} \cdot \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})} = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \cdot (a \vee b \vee c)$.

Дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная форма называется совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) формой (с.д.н.ф. и с.к.н.ф. соответственно), если она удовлетворяет следующим трем свойствам:

1. Все элементарные конъюнкции (дизъюнкции), входящие в нее, различны;
2. В каждой элементарной конъюнкции (дизъюнкции) нет двух вхождений одной и той же логической переменной;
3. Если какая-то буква входит в одну элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию), то она входит и во все остальные.

Совершенные формы могут быть получены по таблице истинности или методом равносильных преобразований, согласно которому:

- Исходная форма приводится к д.н.ф. (к.н.ф.);
- С помощью законов поглощения и идемпотентности производится упрощение формул и тем самым удовлетворяются условия 1 и 2 определения с.д.н.ф. (с.к.н.ф.);
- Если после выполнения пп.1 и 2 окажется, что не выполняется третье условие из определения с.д.н.ф. (с.к.н.ф.), т.е. какая-то элементарная дизъюнкция F (конъюнкция Ф) не содержит переменную x, содержащуюся в других элементарных конъюнкциях (дизъюнкциях), то она заменяется дизъюнкцией (конъюнкцией) двух элементарных конъюнкций (дизъюнкций) ($F = F \cdot x \vee F \cdot \bar{x}$; $\Phi = (\Phi \vee \bar{x}) \cdot (\Phi \vee x)$), равносильной F (Ф). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет удовлетворяться третье условие определения с.д.н.ф. (с.к.н.ф.).

Пример 4.4 Формулу $f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)}$ записать в с.д.н.ф.

Решение: 1-й способ: Таблица истинности данной формулы приведена в примере 4.1 (См. Таблицу 4.1) Тогда с.д.н.ф. данной формулы будет иметь вид:

$f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)} = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee a\bar{b}\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c}$;

2-й способ: д.н.ф. данной формулы была получена в примере 4.2 и имела вид: $f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)} = a\bar{b} \vee \bar{a}b \vee c\bar{b} \vee \bar{c}b$. Тогда выполняя дальнейшие преобразования получаем: $f=(a \equiv b) \to \overline{(c \equiv b)} = a\bar{b} \vee \bar{a}b \vee c\bar{b} \vee \bar{c}b = a\bar{b}\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee \bar{a}\bar{b}c \vee a\bar{b}c$

Математическая или символическая логика имеет два аспекта. С одной стороны, эта логика – аналитическая теория искусства рассуждения, целью которой является разработка принципов рассуждения. Другой аспект связан с проблемами оснований математики.

Цепь рассуждений представляет собой просто конечную последовательность высказываний, приводимых в обоснование утверждения, что последнее высказывание в этой последовательности (заключение) может быть выведено из некоторых начальных высказываний (посылок). Если признать посылки вывода истинными, а принципы, использованные в цепи рассуждений, основанных на этих посылках, правильными, то полученное заключение рассматривается как истинное. Следует подчеркнуть, что истинность посылок определяется вне математической логики; математическая логика формальна в том смысле, что она не делает ссылок на значение.

Рассуждение называется правильным, если из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. всякий раз, когда все посылки истинны, заключение тоже истинно.

Из этого определения вытекает правило: чтобы установить правильность рассуждения достаточно:

- Формализовать все посылки и заключение;
- Составить конъюнкцию формализованных посылок;
- Проверить, следует ли из полученной формулы формула, соответствующая заключению. Если следует, то рассуждение правильное, если нет, то рассуждение неправильное. Так как речь идет лишь о правильности рассуждения, истинность

заключения не является ни необходимым, ни достаточным условием правильности рассуждения.

Суть различия между правильными и неправильными рассуждениями в том, что истинность всех посылок правильного рассуждения гарантирует истинность заключения. В неправильном рассуждении с истинными посылками заключение может быть как истинным, так и ложным.

При записи рассуждений над горизонтальной чертой записывают посылки, а под ней – заключение.

Наиболее распространенными схемами правильных рассуждений являются следующие:

$$\frac{A \to B,\ A}{B}; \qquad \frac{A \to B,\ \overline{B}}{\overline{A}}.$$

Рассмотрим условное высказывание вида $A \to B$, где A – конъюнкция посылок, B – заключение. Иногда удобнее вместо доказательства истинности этого условного высказывания установить логическую истинность некоторого другого высказывания, равносильного исходному. Такие формы доказательства называются косвенными методами доказательства. Одним из них является способ доказательства от противного. Предположим, что утверждение $A \to B$ ложно. Тогда исходя из этого предположения, приходим к противоречию, т.е. доказываем, что некоторое утверждение (соответствующее высказыванию C) выполняется и не выполняется одновременно. Применимость этой формулы косвенного метода доказательства оправдывается равносильностью $A \to B = \overline{(A \to B \to (C \,\&\, \overline{C}))} \to ((A \,\&\, \overline{B}) \to (C \,\&\, \overline{C}))$.

Существуют другие схемы доказательства от противного:

$$A \to B = (A \,\&\, \overline{B}) \to \overline{A};$$

$$A \to B = (A \,\&\, \overline{B}) \to B.$$

Еще одной формой косвенного метода доказательства является доказательство по закону контрапозиции, основанное на равносильности $A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$, когда вместо истинности $A \to B$ доказывается истинность $\overline{B} \to \overline{A}$.

Пример 4.5 Проверить правильность рассуждения: “Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность. Данный многоугольник правильный. Следовательно, в данный многоугольник можно вписать окружность”.

Решение. Для построения схемы рассуждений, введем обозначения высказываний:

X – данный многоугольник правильный;

Y – в данный многоугольник можно вписать окружность.

Тогда схема рассуждения запишется в виде:

$$\frac{X \to Y,\ X}{Y}$$ (modus ponens).

Данной схеме соответствует формула:

$$(X \to Y) \,\&\, Y \to Y.$$

Эта формула является тавтологией. Действительно: $(X \to Y) \,\&\, Y \to Y = (\overline{X} \vee Y) \,\&\, Y \to Y = \overline{X} \,\&\, Y \vee Y \to Y = Y \,\&\, (\overline{X} \vee 1) \to Y = Y \to Y = 1.$ Следовательно, рассуждения правильные.

Ответ: Рассуждения являются правильными.

Пример 4.6 Проверить правильность рассуждения: “Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность. В данный многоугольник нельзя вписать окружность. Следовательно, данный многоугольник не есть правильный”.

Решение. Оставив прежние обозначения высказываний, получаем следующую схему рассуждений:

$\dfrac{X \to Y,\ \overline{Y}}{\overline{X}}$ (modus tollens),

которой соответствует формула $(X \to Y) \& \overline{Y} \to \overline{X}$, являющейся тавтологией, в чем можно убедиться, например, построив таблицу истинности:

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \to Y$	$(X \to Y) \& \overline{Y}$	$(X \to Y) \& \overline{Y} \to \overline{X}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1

Следовательно, рассуждения являются правильными.
Ответ: Рассуждения являются правильными.

Пример 4.7 Проверить правильность рассуждения: “Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность. В данный многоугольник можно вписать окружность. Следовательно, данный многоугольник правильный”.

Решение. При тех же обозначениях высказываний, что и в предыдущих случаях, схема рассуждения будет иметь вид:

$$\frac{X \to Y,\ Y}{X},$$

которой в этом случае будет соответствовать формула $(X \to Y) \& Y \to X$ и которая не является тавтологией. Действительно, $(X \to Y) \& Y \to X = \overline{X} \& Y \vee Y \to X = Y \to X$. Из результата преобразования формулы видно, что она не является тавтологией и, следовательно, рассуждения не являются правильными.
Ответ: Рассуждения не являются правильными.

Пример 4.8 Проверить правильность рассуждения: “Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность. Данный многоугольник не есть правильный. Следовательно, в него нельзя вписать окружность”.

Решение. В этом случае схема рассуждения имеет вид:

$$\frac{X \to Y,\ \overline{X}}{\overline{Y}},$$

которой соответствует формула $(X \to Y) \& \overline{X} \to \overline{Y}$ не являющаяся тавтологией.
$((X \to Y) \& \overline{X} \to \overline{Y} = (\overline{X} \vee Y) \& \overline{X} \to \overline{Y} = \overline{X} \vee \overline{X} \& Y \to \overline{Y} = \overline{X} \to \overline{Y} = X \vee \overline{Y})$.
Следовательно, рассуждения не являются правильными.
Ответ: Рассуждения не являются правильными.

Пример 4.9 Проверить правильность рассуждения: “Если Иванов является участником этого преступления, то он знал потерпевшего. Иванов не знал потерпевшего, но знал его жену. Потерпевший знал Иванова. Следовательно, Иванов является участником этого преступления”.

Решение. Введем следующие обозначения высказываний:
A – Иванов является участником этого преступления;
B – Иванов знал потерпевшего;
C – Иванов знал жену потерпевшего;
D – Потерпевший знал Иванова.
Запишем схему рассуждений в виде:

$$\frac{A \to B,\ \overline{B} \& C,\ D}{A}$$

Этому рассуждению соответствует формула:

$$(A \to B) \& (\overline{B} \& C) \& D \to A$$

Если эта формула является тавтологией, то рассуждение является правильным, в противном случае – неправильным.

$(A \to B) \& (\overline{B} \& C) \& D \to A = (\overline{A} \vee B) \& \overline{B} \& C \& D \to A = \overline{A} \& \overline{B} \& C \& D \to A =$

$\overline{\overline{A} \& \overline{B} \& C \& D} \vee A = A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee A = A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$. Т.е. формула не является тавтологией, и, следовательно, рассуждение нельзя признать правильным.

Проверку формулы можно было осуществить и по таблице истинности.

Ответ: Рассуждения не являются правильными.

Пример 4.10 Проверить правильность рассуждения. “Если число рациональное, то оно представимо в виде отношения двух целых чисел. Следовательно, если число не представимо в виде отношения двух целых чисел, то оно не является рациональным”.

Решение. Введем обозначения высказываний:

X – число рациональное;

Y – число представимо в виде отношения двух целых чисел.

Схема рассуждения запишется в виде:

$$\frac{X \to Y}{\overline{\overline{Y} \to \overline{X}}}.$$

Этой схеме соответствует формула $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$, которая является тавтологией (закон контрапозиции). Следовательно, рассуждения являются правильными.

Ответ: Рассуждения являются правильными.

Пример 4.11 Проверить правильность рассуждения. “Если треугольник равнобедренный, то две его стороны равны. Если две стороны треугольника равны, то два угла его равны. Следовательно, если треугольник равнобедренный, то два угла его равны”.

Решение. Введем обозначения высказываний:

X – треугольник равнобедренный;

Y – две стороны равны;

Z – два угла равны.

Запишем схему рассуждений:

$$\frac{X \to Y,\ Y \to Z}{X \to Z}.$$

Этой схеме соответствует формула $(X \to Y) \& (Y \to Z) \to (X \to Z)$ (правило силлогизма), которая есть тавтология.

Ответ: Рассуждение правильное.

Пример 4.12 Проверить правильность рассуждения. “Если я пойду завтра на первое занятие, то я должен встать рано, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то я вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следовательно, я должен пропустить завтра первое занятие или не ходить на танцы”.

Решение. Чтобы исследовать, правильно ли это рассуждение, формализуем все его посылки и заключение, введя обозначения высказываний:

C – “Я пойду завтра на первое занятие”;

G – “Я должен встать рано”;

D – “Я пойду вечером на танцы”;

S – “Я лягу спать поздно”;

E – “Я могу обойтись пятью часами сна”.

Схему рассуждения можно записать в виде:

$$\frac{(C \to G)\,\&\,(D \to S),\ S\,\&\,G \to E,\ \overline{E}}{\overline{C} \vee \overline{D}}.$$

Примем, что $\overline{C} \vee \overline{D}$ имеет значение ложь (0), а каждая из посылок имеет значение истина (1). Тогда и C, и D должны иметь значение 1 (истина). Далее, как следует из первой посылки, и G, и S имеют значение 1 (истина). Это и вторая посылка влекут за собой, что E имеет значение 1 (истина). Но это противоречит допущению, что третья посылка имеет значение истина. Следовательно, $\overline{C} \vee \overline{D}$ не может иметь значение 0 (ложь), и так как $\overline{C} \vee \overline{D}$ есть логическое следствие имеющихся посылок, то рассуждение является правильным.

Ответ: Рассуждение правильное.

Задачи для самостоятельного решения

№ 4.1 Для указанных формул составьте таблицы истинности:

а). $x \to y \vee z$; б). $(x \leftrightarrow z)\,\&\,z$; в). $x_1\,\&\,x_3 \to x_2 \vee \overline{x}_1$; г). $\overline{x}_4 \leftrightarrow x_2 \vee \overline{x}_3\,\&\,x_1$;

д). $(\overline{x}_2 \leftrightarrow x_1\,\&\,\overline{x}_3) \to (x_2 \vee \overline{x}_4)$; е). $(a \vee b \cdot \overline{c}) \to (d \leftrightarrow \overline{a} \cdot b \vee c)$.

№ 4.2 Для указанных формул методом равносильных преобразований получите д.н.ф.

а). $\overline{y \to \overline{z}} \leftrightarrow (y \vee \overline{x})$; б). $(x \vee \overline{y}) \leftrightarrow (\overline{x} \to \overline{z})$; в). $(\overline{z} \to x) \leftrightarrow \overline{y \cdot z}$; г). $(\overline{x} \to z) \leftrightarrow (\overline{x} \vee y)$;

д). $(\overline{x} \to \overline{z}) \leftrightarrow (y \to \overline{x})$; е). $\overline{y \to z} \leftrightarrow \overline{z \to x}$; ж). $(y \to \overline{x}) \leftrightarrow \overline{\overline{x} \vee z}$; з). $\overline{z \to \overline{x}} \leftrightarrow y \cdot \overline{x}$;

и). $(\overline{x} \vee z) \leftrightarrow (\overline{x} \to \overline{y})$; к). $\overline{\overline{x} \to \overline{y}} \leftrightarrow \overline{x \cdot \overline{z}}$; л). $\overline{\overline{x \leftrightarrow z} \leftrightarrow (y \leftrightarrow x)}$; м). $z \to (\overline{x} \leftrightarrow y)$;

н). $(x \leftrightarrow z \cdot \overline{y}) \to (y \vee (x \leftrightarrow z))$; о). $(x_3 \leftrightarrow \overline{x}_4) \to (\overline{x}_2 \vee \overline{x_1 \cdot x_4})$; п). $(x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow x_3$;

р). $(\overline{x}_1 \leftrightarrow \overline{x}_2) \leftrightarrow (\overline{x}_3 \leftrightarrow \overline{x}_4)$; с). $\overline{x_1 \to \overline{x}_4 \leftrightarrow \overline{x_3 \vee x_2}}$; т). $\overline{(a \leftrightarrow \overline{b}) \to \overline{d \cdot c}}$.

№ 4.3 Для указанных в № 4.2 формул методом равносильных преобразований получите к.н.ф.

№ 4.4 Для указанных формул методом равносильных преобразований получите с.д.н.ф.

а). $\overline{y \to \overline{z}} \leftrightarrow (y \vee \overline{x})$; б). $(x \vee \overline{y}) \leftrightarrow (\overline{x} \to \overline{z})$; в). $(\overline{z} \to x) \leftrightarrow \overline{y \cdot z}$; г). $(\overline{x} \to z) \leftrightarrow (\overline{x} \vee y)$;

д). $(\overline{x} \to \overline{z}) \leftrightarrow (y \to \overline{x})$; е). $\overline{y \to z} \leftrightarrow \overline{z \to x}$; ж). $(y \to \overline{x}) \leftrightarrow \overline{\overline{x} \vee z}$; з). $\overline{z \to \overline{x}} \leftrightarrow y \cdot \overline{x}$;

и). $(\overline{x} \vee z) \leftrightarrow (\overline{x} \to \overline{y})$; к). $\overline{\overline{x} \to \overline{y}} \leftrightarrow \overline{x \cdot \overline{z}}$; л). $\overline{\overline{x \leftrightarrow z} \leftrightarrow (y \leftrightarrow x)}$; м). $z \to (\overline{x} \leftrightarrow y)$;

№ 4. 5 Для указанных в № 4.4 формул получите с.д.н.ф., построив таблицу истинности. Сравните полученные результаты с результатами, полученными при решении № 4.4.

№ 4.6. Для указанных в № 4.4 формул методом равносильных преобразований получите с.к.н.ф.

№ 4.7 По таблицам истинности, полученным в № 4.5 приведите с.к.н.ф. заданных формул.

№ 4.8 Проверьте правильность рассуждений:

а) “Я выхожу из дома либо поздно, либо вовремя. Если я выхожу из дома вовремя, то сразу же сажусь в автобус. Если я выхожу из дома поздно, то я не смогу сесть в переполненный автобус. Если я сажусь в автобус сразу же, то я успеваю на занятия. Следовательно, я успеваю на занятия только тогда, когда выхожу из дома вовремя”.

b) “Если завтра будет холодно и рукав будет почищен, то я надену теплое пальто. Завтра будет холодно, а рукав не будет почищен. Следовательно, я не надену теплое пальто.”

c) “Если Аня переутомилась или больна, то она раздражается и у нее болит голова. Если у нее болит голова, то она пьет лекарство от головной боли. Аня сегодня не принимала лекарство от головной боли. Следовательно, аня не больна”.

d) “Если Иван приходит домой не поздно и в хорошем настроении, то он смотрит телевизор. Когда он смотрит телевизор, то всегда что нибудь ест. Иван пришел домой не поздно и ничего не ест. Следовательно, он пришел домой в плохом настроении”.

e) “Если он обладает большими знаниями или удачлив, то он добьется цели. Если он не будет обладать большими знаниями, то он не сможет быть удачлив. Следовательно, если он не обладает большими знаниями, то он не добьется цели”.

f) “Если он будет обладать большими знаниями и будет удачливым, то он добьется цели. Если он будет удачливым, то он не сможет обладать большими знаниями. Следовательно, если он не добьется цели, то он не обладает большими знаниями”.

g) “Если в результате эксперимента получен неверный результат, то либо в теоретических расчетах есть ошибка, либо эксперимент был поставлен неправильно. Не могут быть одновременно и ошибка в теоретических расчетах и неправильно поставленный эксперимент. Если в теоретических расчетах нет ошибки, то эксперимент поставлен правильно. Следовательно, в результате эксперимента получен верный результат.”

h) “Если Борис победит на выборах, он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в предвыборной компании. Но если он провалится на выборах, то он потеряет доверие партии. Он плохой борец в предвыборной компании, если он потеряет доверие партии. Если он плохой борец в предвыборной компании, ему следует выйти из партии. Борис или победит на выборах, или провалится. Следовательно, ему нужно выйти из партии”.

i) “Если цены высоки, то и заработная плата высока. Цены высоки или применяется регулирование цен. Если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Наблюдается инфляция. Следовательно, заработная плата высока”.

j) “Я отдам свой ваучер на свое предприятие только тогда, когда я буду уверен в себе и будет согласна жена. Жена согласна отдать мой ваучер на мое предприятие, но я не отдал ваучер на свое предприятие, а решил повременить. Следовательно, я не уверен в себе”.

k) “Число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Число не делится на 6, но делится на 3. Следовательно, оно не делится на 2”.

№ 4.9 Решите задачи с помощью логических операций:

a) Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший этих ребят, высказал следующие предположения:
A) Аня пойдет в кино только тогда, когда пойдут Вика и Сергей;
B) Аня и Сергей пойдут в кино вместе или же оба останутся дома;
C) Чтобы Сергей пошел в кино, необходимо, чтобы пошла Вика.
Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из названных ребят пошел в кино?

b) Костя пригласил свою сестру к нему в гости. После этого он получил от нее три сообщения:
   1) Я приду в гости, если только со мной приедет папа;
   2) Чтобы я приехала, необходимо, чтобы меня сопровождала мама:
   3) Либо приедем мы с мамой, либо приедет только папа.

   Когда гости приехали, оказалось, что из трех сообщений истинным было только одно. Кто приехал навестить Костю?

c) Алексей решил поступить в СарФТИ и сделал три сообщения:
   1) Если я сдам математику, то физику я сдам только при условии, что не завалю сочинение;
   2) Не может быть, чтобы я завалил и сочинение и математику;
   3) Достаточное условие завала по физике – двойка по сочинению

   После сдачи экзаменов оказалось, что из трех сообщений только одно было ложным. Как Алексей сдал экзамены?

d) Относительно погоды на завтра были высказаны следующие соображения:
   1) Дождь или пасмурная погода бывают только при повышенной влажности;
   2) Для того, чтобы пошел дождь, необходима пасмурная погода;
   3) Ясную погоду без дождя можно ожидать, если воздух будет сухой.
   4) Если не будет дождя, то достаточным условием повышенной влажности будет пасмурная погода;
   5) Повышенная влажность бывает только при ясной погоде. Значит дождя не будет.

   Эти высказывания можно лаконично записать в виде двух предложений. Сформулируйте их, решив задачу с помощью логических операций.

e) Для того, чтобы Саша поступил в университет, достаточно чтобы Аня или Вика не поступили в университет. Вика поступает в университет вместе с Димой. Не может быть, чтобы в университет поступили и Аня и Саша. Для того, чтобы Аня поступила в университет необходимо, чтобы в университет поступили Дима и Саша. Кто поступил в университет?

f) Проверьте правильность следующего умозаключения:

   В вазе лежит только одно яблоко. Известно, что оно красное либо зеленое. Если яблоко красное и большое, то оно сладкое. Если же яблоко зеленое и не сладкое, то оно не большое. Выяснилось также, что яблоко сладкое. Вывод: Если это яблоко не большое и не красное, то оно зеленое.

g) Студенты узнали, что к ним в группу должен прийти юноша из другого института. Обсуждая эту новость, студенты высказали ряд предложений:
   1) Для того, чтобы новичок был добрым, достаточно, чтобы он был умным и сильным;
   2) Если новичок силач, то он либо глупый, либо злой;
   3) Если новичок умный, то для того, чтобы он был добрым, необходимо чтобы он был сильным.

   Преподаватель сказал, что из этих условий выполнено только одно. Кроме того, преподаватель сказал: “Необходимое условие доброты – это ум. Значит новичок умный, но слабый.” Каким был новичок? Решить задачу с помощью логических операций.

h) Проверьте правильность следующего умозаключения с помощью логических операций:
“Будет пасмурная погода с дождем. Если будет дождь, то будет и снег. Если будет пасмурная погода с ветром, то снега не будет. Вывод: Ветра не будет”.

i) Собираясь в поход, ребята высказали следующие суждения:
1) Если будет холодно или пойдет снег, то поход не состоится;
2) Если будет холодно, то пойдет дождь;
3) Если не будет холодно и поход состоится, то дождя не будет.
Учитель сказал, что эти суждения можно свести к двум простейшим высказываниям. Сформулируйте их, решив задачу с помощью логических операций.

j) На олимпиаде по информатике студенты A, B, C и D заняли первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:
1) D – первый или B –второй;
2) C – первый или A – четвертый;
3) D – второй или B – третий.
Как распределились места, если в каждом ответе одно утверждение истинно

k) На вопрос, кто из трех школьников A, B и C может работать на персональном компьютере, был получен ответ: “Если может работать B, то может работать и C, но неверно, что если может работать A, то может работать и C. Кто из трех школьников может работать на компьютере?

l) Какой из учебных предметов - информатика, физика, математика или история должен быть внесен в расписание уроков при выполнении следующих условий:
1) Если вносится информатика, то вносится и физика;
2) Если не вносится история, то не вносится физика;
3) Неверно, что если вносится математика, то вносится и история.

4.2 Логика предикатов

n-местным предикатом $P(x_1, x_2, ...x_n)$, заданным на множествах M_1, M_2, ….. M_n называется выражение, содержащее n предметных переменных данных множеств и превращающиеся в высказывания, если вместо предметных переменных x_1, x_2, …. x_n подставить конкретные объекты из множества M_1, M_2, ….. M_n, $x_i \in M_i$, $i = \overline{1, n}$. Множества M_1, M_2, ….. M_n называются базисными множествами. Предикат, у которого базисные множества совпадают, называется однородным.

Пусть P(x) – одноместный предикат с базисным множеством M. Множество тех элементов $x \in M$, для которых P(x) принимает значение “истина”, называется множеством истинности предиката P(x) и обозначается $\{x|P(x)\}$.

Так же, как и над высказываниями, над предикатами можно производить операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции. Кроме вышеперечисленных операций, в логике предикатов употребляются операции квантификации, т.е. операции приписывания перед предикатом кванторов общности $\forall$ и существования $\exists$, выражающих собой утверждения общности и существования.

Выражение $\forall(x)P(x)$ (читается “для любого P(x)”) является высказыванием, котрое истинно, если P(x) истинно для каждого (любого, всех) элемента x из базисного множества M и ложно в противном случае.

Выражение $\exists(x)P(x)$ (читается “существует или найдется такое x, что P(x)”) является высказыванием, которое истинно, если существует такой элемент, принадлежащий M, что P(x) истинно и ложно в противном случае.

Одноименные кванторы можно ставить в произвольном порядке, так как

$\forall(x)\,\forall(y)\,P(x,y) \leftrightarrow \forall(y)\,\forall(x)\,P(x,y)$;

$\exists(x)\,\exists(y)\,P(x,y) \leftrightarrow \exists(y)\,\exists(x)\,P(x,y)$.

Разноименные кванторы менять местами нельзя.

Пример 4.13 Используя кванторы, запишите определение: “последовательность x_1, x_2, $\ldots x_n \ldots = \{x_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число C, что любой ее член по модулю не больше C”.

Решение. С испотльзованием кванторов данное определение можно записать как $\exists(C)\,\forall(n)\{|x_n| \le C\}$.

Пример 4.14 Запишите схему рассуждения с использованием кванторов: “Всякий друг Максима есть друг Дмитрия. Петр не есть друг Дмитрия. Следовательно, Петр не есть друг Максима.

Решение. Формализуем высказывания. Пусть m, d, p обозначают соответственно «Максим», «Дмитрий», «Петр». F(x, y) – «x есть друг y». Тогда рассуждение запишется следующим образом:

$$\frac{\forall(x)(F(x,m) \to F(x,d)),\ \overline{F(p,d)}}{\overline{F(p,m)}}.$$

№ 4.10 Запишите определение в компактном виде, используя квантор существования $\exists$ и общности $\forall$:

a) Говорят, что функция f(x) является бесконечно большой в точке $x=x_0$, если для любого M>0, как бы велико оно ни было, найдется такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| << \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

b) Функция f(x) непрерывна в точке x_0 тогда т только тогда, когда для любого положительного $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$, что для всех $x \in R$ и удовлетворяющих неравенству $|x - x\,| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

c) Функция f(x) непрерывна на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда для любого x_0 из интервала (a,b) и любого числа $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta>0$, что для всех $x \in (a,b)$ из неравенства $|x_0 - x| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

d) Функция f(x) равномерно непрерывна на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых $x_0 \in (a,b)$ и для любых $x \in (a,b)$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

e) Число a называется пределом последовательности x_1, x_2, x_3,….., x_n…, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что для всех n>N будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

f) Число b называется пределом функции f(x) в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

g) Говорят, что функция f(x) является бесконечно малой в точке $x=x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < | x - x_0 | < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$.

h) Говорят, что f(x)стремится к бесконечности в точке $x=x_0$, если для любого M>0, как бы велико оно ни было, существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < | x - x_0 | < \delta$, выполняется неравенство |f(x)|>M.

i) Число b называется пределом функции f(x) в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство $| f(x) - b | < \varepsilon$ будет выполняться всякий раз, как только будет выполняться неравенство $0 < | x - x_0 | < \delta$.

j) Говорят, что функция f(x) стремится к бесконечности при неограниченном удалении от начала координат, если для любого M>0, как бы велико оно ни было, можно указать такое число N>0, что из неравенства |x|>N следует всегда неравенство |f(x)|>M.

№ 4.11 Запишите следующие предложения в виде формул, используя кванторы:

a) Все рыбы, кроме акул, добры к детям.

b) Не все птицы умеют летать.

c) Либо каждый любит кого-нибудь, и ни один не любти всех; либо некто любит всех, и кто-то не люббит никого.

d) Ты можешь обманывать кое-кого все время, ты можешь обманывать всех некоторое время, но ты не можешь обманывать всех все время.

e) Некоторые остроумны только когда пьяны.

f) Ни один политика не честен.

g) Если кто-то может сделать это, то это может и Иван.

h) Всякий, в ком есть упорство, может изучить логику.

i) Если всякий разумный философ – циник и только женщины являются разумными философами, то тогда, если существуют разумные философы, то некоторые из женщин – циники.

Литература

1. А.Я. Савельев. Прикладная теория цифровых автоматов. М., В.ш., 1987г.
2. П.С. Новиков. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., Наука, 1977г.
3. Алексеев В.В. Арифметические и логические основы ЭВМ. Уч.метод. пособие., СарФТИ, 1997г.